Inleidende cursus Wiskunde 2011-2012

We werken meestal in de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen, waarbij het nodig is vlot te kunnen omgaan met algebraïsche rekenregels. We verwijzen voor een meer gedetailleerde beschrijving naar het handboek (afgekort tot [WBT]):

> Verheyen, P. & Janssens, D., *Wiskunde met bedrijfseconomische toepassingen* (tweede druk), Acco, Leuven/Den Haag, 2009, ISBN 978-90-334-7593-1

1. *Machten in* $\mathbb{R}$ (zie [WBT 1.2])

LET OP:

Een tweedemachtswortel $\sqrt{a}$ bestaat als $a \in \mathbb{R}^+$ en dan geldt steeds dat $\sqrt{a} \in \mathbb{R}^+$. Zo is $\sqrt{4} = 2$ (maar niet gelijk aan -2).

$\sqrt[3]{a}$ daarentegen bestaat voor elke $a \in \mathbb{R}$, terwijl $a^{\frac{1}{3}}$ slechts bestaat voor $a \in \mathbb{R}^+$.

1.2.5 Eigenschappen

$$\boxed{\begin{gathered} a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \\ (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \\ (a^x)^y = a^{x \cdot y}, \\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \end{gathered}}$$

als $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $x, y \in \mathbb{R}$.

1.2.6 Volgorde van bewerkingen

Let goed op voor de volgorde waarin bewerkingen dienen uitgevoerd!

Opgaven (zie [WBT 1.2])

1.1 Werk uit:

1) $2^4 : 2^7$

2) $(-2)^4 : (-2)^7$

3) $-2^4 : 2^{-7}$

4) $2^4 : (-2)^{-7}$

5) $2^4 : (-2^7)$

6) $(-2^4) : (-2)^{-7}$

7) $(-100)^{-5}\ (0,1)^{-4}$

8) $(3^2)^4$

9) $3^{(2^4)}$

10) $\left((-1)^3\right)^5$

11) $\dfrac{5^{10}}{5^{11}}$

12) $5^{-3} : 5^{-5}$

13) $\dfrac{5^{-4}}{(-5)^4}$

14) $\dfrac{5^4}{-5^{-4}}$

15) $\left(5^{-3}\right)^{-5}$

16) $\left(\sqrt{4}\right)^3$

17) $\sqrt[3]{125}$

18) $8^{\frac{2}{3}}$

19) $8^{-\frac{2}{3}}$

20) $16^{-\frac{1}{2}}$

21) $16^{-\frac{3}{4}}$

22) $32^{0,8}$

23) $\sqrt[3]{128}$

24) $2^{-3} \cdot 16^{-\frac{1}{4}} \cdot 4^2$

1.2 Herschrijf als een vorm $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ (a,b,c $\in \mathbb{R}_0^+$):

1) $\left(a^{-5} : a^{2}\right)^{-3}$
2) $a^{-5} : a^{3}$
3) $(-a)^{5}a^{4}$
4) $-a^{5}a^{4}$
5) $(-a)^{5}(-a)^{4}$
6) $a^{5}\left(-a^{4}\right)$
7) $(-a)^{-4} : (-a)^{-3}$
8) $(-a)^{-4} \cdot (-a)^{-2}$
9) $a^{0}a^{-4}$
10) $a^{0} : a^{-3}$
11) $\left(a^{-3} : a^{-6}\right)^{-2}$
12) $\left(a^{3}a^{-7}\right)^{-2}$
13) $\left(a^{2}b^{3}\right)\left(a^{-2}b^{-4}\right)$
14) $\left(a^{2}b^{3}\right) : \left(a^{-2}b^{-4}\right)$
15) $\left(a^{2}b^{3}\right) : \left(a^{2}b^{-4}\right)$
16) $\left(a^{2}b^{3}c^{-3}\right)\left(a^{7}c^{-5}b^{-3}\right)$
17) $\left(\dfrac{a^{2}b^{3}}{c^{5}}\right)^{4}$
18) $\left(\dfrac{a^{-2}b^{3}c^{4}}{a^{5}b^{-5}c^{2}}\right)^{-2}$
19) $\left(a^{4}b^{6}c^{2/3}\right)^{1/2}$
20) $\left(a^{1/2}b^{1/4}c^{-1/8}\right)^{4}$
21) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}$

22) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} : \left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}\right)$

23) $\sqrt[4]{16ab^{10}c^{24}}$

24) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} ab^{-3}c^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

25) $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{5}{6}}c^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}}$

26) $a^b b^a : \left(-a^{-b}b^{2a}c^{-2}\right)$

27) $\left[a^{-a}b^{-\frac{c}{a}} : \left(b^{\frac{a}{c}}c^a\right)\right]^{-2}$

28) $\left(a^{\frac{5}{8}} : a^{\frac{3}{4}}\right) : a^{-\frac{1}{2}}$

1.3 Vereenvoudig: (veronderstel steeds dat de gegeven uitdrukkingen bestaan)

1) $\dfrac{1 - \dfrac{2}{x+1}}{x - \dfrac{1}{x}}$

2) $\dfrac{\dfrac{1}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{a}$

3) $\dfrac{3x^2\,(2x+5)^{\frac{1}{2}} - x^3\,\dfrac{1}{2}(2x+5)^{\frac{-1}{2}}\,2}{\left[(2x+5)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$

4) $\dfrac{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{3}}\,3 - 3x\,\dfrac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{-2}{3}}\,(2x)}{\left[\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2}$

5) $\dfrac{\left(4x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}2-(2x+3)\frac{1}{2}\left(4x^2+9\right)^{\frac{-1}{2}}(8x)}{\left[\left(4x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$

2. *Elementaire functies: veeltermen* (zie [WBT 2])

Opgaven

2.1 Los op en ontbind de linkerhandzijden van de gelijkheden in factoren (steeds over $\mathbb{R}$):

1) $x^2 - x - 2 = 0$

2) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

3) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

4) $x^2 - x + 2 = 0$

5) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$

6) $x^3 - 2x^2 - 31x + 20 = 0$

7) $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$

8) $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x = 0$

9) $-x^3 - 4x^2 + 3x + 18 = 0$

10) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

11) $(2x-1)^2 - 5(2x-1) - 14 = 0$

12) $\left(2x^2 - x\right)^2 + 4(-2x^2 + x) + 3 = 0$

13) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

2.2 Los op (in $\mathbb{R}$):

1) $(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$

2) $\left(x^2 + 3x + 4\right)^2 - 12\left(x^2 + 3x + 4\right) - 28 = 0$

3) $x^2 - x - 2 < 0$

4) $-x^2 - x + 2 > 0$

5) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 > 0$

3. (On)gelijkheden betreffende rationale vormen

Opgaven

3.1 Los op:

1) $\dfrac{-2x^2 + 4x - 1}{x^2 - 1} < 0$

2) $\dfrac{x-3}{x-2} > 0$

3) $\dfrac{x-3}{x-2} > 1$

4) $x + 2 \le \dfrac{3}{2x-1}$

5) $\dfrac{x-4}{2x+3} < \dfrac{x-1}{x+2}$

6) $\dfrac{3x+2}{x-1} + \dfrac{3x-1}{3x} > \dfrac{4x-3}{x}$

7) $\dfrac{3}{2x-4} - \dfrac{5}{x+3} \ge \dfrac{2}{x-2}$

3.2 Vervolledigen tot een kwadraat

De kwadratische uitdrukking $x^2 + 3x + 2$ kan geschreven worden als de som van een "perfect kwadraat" $\left[\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2\right]$ en een getal $\left[-\dfrac{1}{4}\right]$:

$$x^2 + 3x + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Herschrijf de volgende uitdrukkingen eveneens onder de vorm $(ax + b)^2 + c$ met a, b, c $\in \mathbb{R}$:

1) $x^2 + 3x + 1$

2) $x^2 + 8x - 2$

3) $4x^2 + 8x + 1$

4) $9x^2 - 5x + 7$

5) $2x^2 + x + 1$

6) $3x^2 - 2x + 3$

7) $x^2 + \sqrt{2}x + 1$

8) $x^2 - 5x + 3$

9) $8x^2 + 2x - 7$

4. Vlakke analytische meetkunde

Opgaven

4.1 Cirkels in een vlak

α) Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt a(1,2) en straal 2.

β) Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt a(1,2) die door het punt (4,6) gaat.

γ) Bepaal middelpunt en straal van de cirkels met vergelijking:

1) $x^2 + y^2 - x + y = \frac{7}{2}$

2) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 2y + \frac{1}{3} = 0$

3) $x^2 + y^2 = \sqrt{2}x - 2y - \frac{1}{2}$

4.2 Rechten in een vlak

1) Bepaal een vergelijking van de rechte ab als

- α) a(1,0) en b(3,2)
- β) a(-1,2) en b(3,2)
- γ) a(-1,-3) en b(-1,2)
- δ) a(1,5) en b(1,8)
- ε) a(5,2) en b(4,2)

2) Teken de volgende rechten:

$R_1 \leftrightarrow x + 3y - 6 = 0$

$R_2 \leftrightarrow 2x - 3y + 6 = 0$

$R_3 \leftrightarrow 5x + 7y = 0$

$R_4 \leftrightarrow 2x + 3y = 5$

3) Bepaal een vergelijking van de rechte door a(1,2) evenwijdig met de rechte $2x + y + 3 = 0$.

4) Bepaal een vergelijking van de rechte door a(1,–1) loodrecht op de rechte $x + 2y + 8 = 0$.

5) Bepaal het snijpunt van de rechten $3x + y - 6 = 0$ en $x + 2y + 4 = 0$.

6) Zoek het snijpunt van de loodlijn door c(1,-1) op de rechte ab met de rechte ab wanneer a(2,3) en b(7,5).

4.3 Rechten en cirkels in een vlak

1) Zoek de snijpunten van de rechte $x - y + 1 = 0$ met de cirkels
   a) $x^2 + y^2 - 2x = 3$
   b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 2x = 1$
   d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$

   Maak telkens een tekening.
2) Bepaal de snijpunten van de cirkels $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ en $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.
3) Bepaal de snijpunten van de cirkels $x^2 + y^2 = 25$ en $x^2 + y^2 + 2x - 14y = -25$.

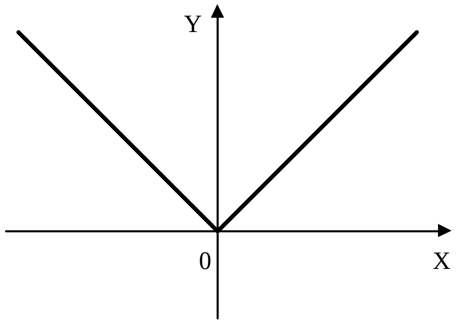
4.4 Andere stelsels

1) Zoek de snijpunten van de rechte $x + 2y + 1 = 0$ en de parabool $y = x^2$.
2) Los op en maak telkens een bijhorende tekening:
   a) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 7x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$
   d) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$
   e) $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$
   f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19 \end{cases}$
3) Los op:
   a) $\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 6x - 6y^2 = 0 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 2x^2y^2 = 0 \\ xy^2 = 0 \end{cases}$

5. Andere elementaire functies

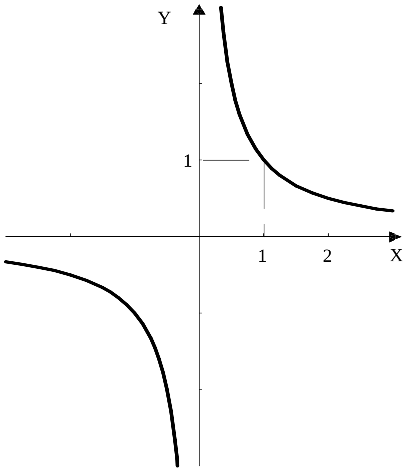
Naast de grafische voorstellingen van eerste- en tweedegraadsfuncties (d.w.z. rechten en parabolen) ken je ook de grafieken van

de absolute waarde functie

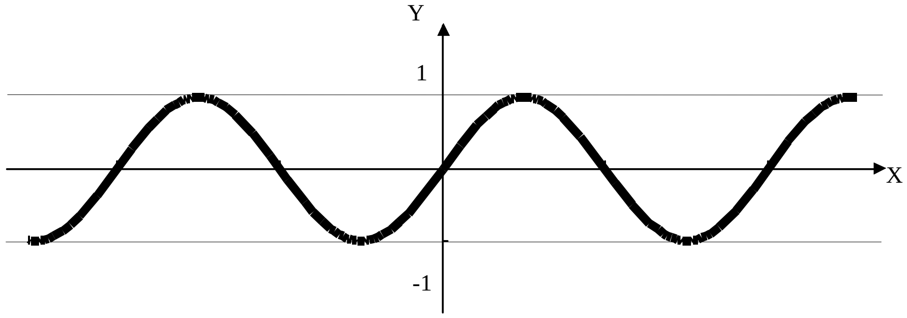


$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

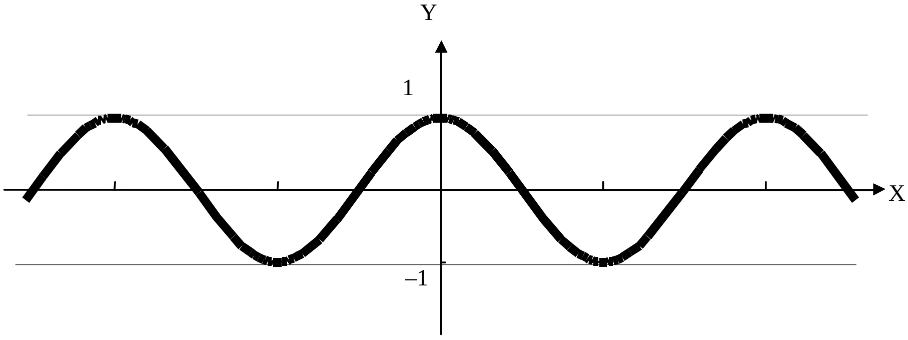
(een hyperbool)



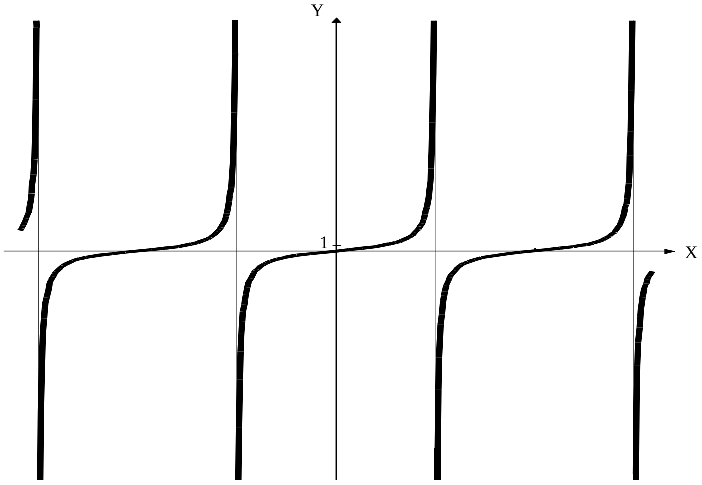
sin



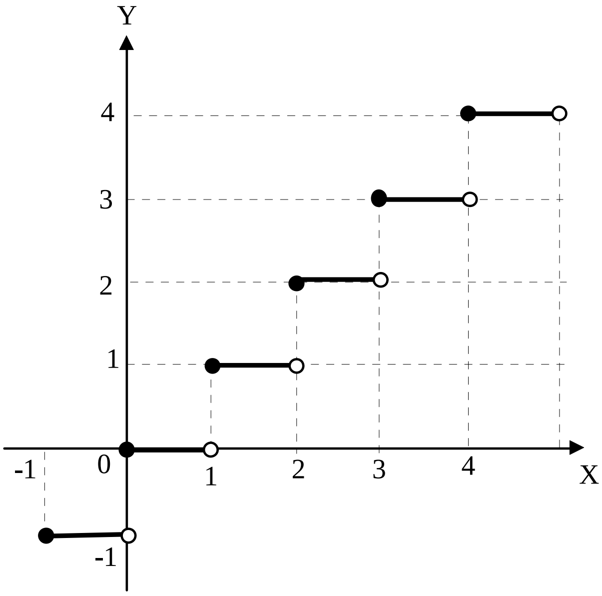
cos



tg

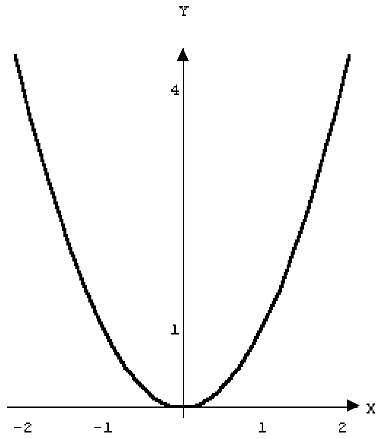


INT (waarbij INT(x) het grootste gehele getal is kleiner dan of gelijk aan x)

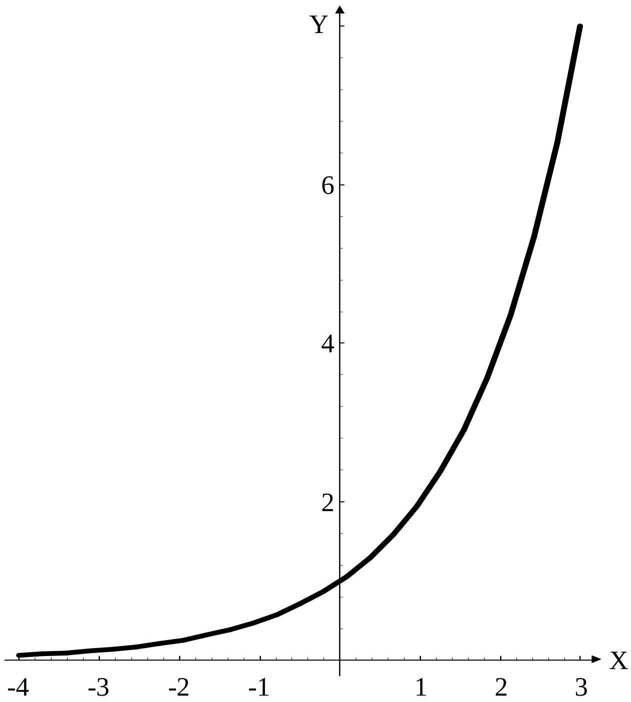


Het is belangrijk het verschil te kennen tussen een veeltermfunctie zoals $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ en een exponentiële functie zoals $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$ [WBT 6.3.1].

De grafiek van $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is een parabool

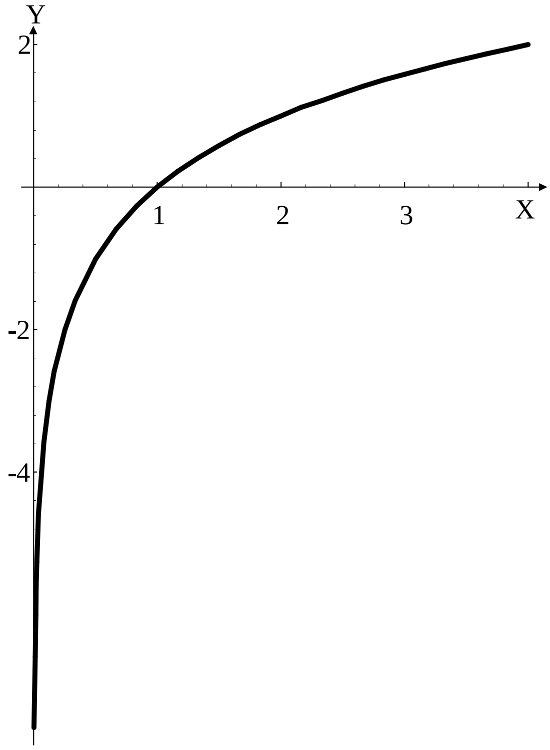


terwijl deze van $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$ de volgende vorm heeft:



De functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ heeft geen inverse functie, terwijl dit wel zo is voor $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$: deze inverse van $\exp_2$ noemt men de logaritmische functie met grondtal 2, notatie $\log_2$. Met andere woorden: $\boxed{y = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^y}$.

Het domein van $\log_2$ is $\mathbb{R}_0^+$ [zie ook WBT 6.3.1.2].



Opgaven

5.1 Grafieken

Schets de grafiek van de functie f met functievoorschrift f(x) =

a) $2x^2 - 7x + 6$

b) i) $-x^2 - 1$

ii) $-(x - 2)^2 - 1$

iii) $-(x + 3)^2 - 1$

c) i) $\frac{1}{x}$

ii) $\frac{1}{x-2}$

iii) $\frac{1}{x+3}$

d) $\begin{cases} x+2 & \text{als} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{als} \quad 0 < x \leq 4 \\ x+2 & \text{als} \quad 4 \leq x < 6 \\ -\frac{1}{2}x^2 - x + 32 & \text{als} \quad x \geq 6 \end{cases}$

e) $\frac{x}{|x|}$

5.2 Logaritmische en exponentiële functies

Bereken (indien mogelijk):

1) $\log_2 1$
2) $\log_2 2$
3) $\log_2 8$
4) $\log_2 0$
5) $\log_2 (16^{-1})$
6) $\log_2 (-16)$
7) $\exp_2 1$
8) $\exp_2 2$
9) $\exp_2 8$
10) $\exp_2 0$
11) $\exp_2 (16^{-1})$
12) $\exp_2 (-16)$

5.3 Domein van een functie

Bepaal het domein van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ als $f(x)$ gelijk is aan

1) $\frac{2}{x^2 - 5}$
2) $\frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$

3) $\dfrac{x^2-2}{x^2+4}$

4) $\dfrac{\log_2(x-1)}{x}$

5) $\log_2 \dfrac{x-1}{x}$

6) $\log_2(x-1)-\log_2 x$

7) $\dfrac{\log_2(x+1)}{x}$

8) $\log_2 \dfrac{x^2+1}{x-1}$

6. Het sommatieteken([WBT 1.4])

Voor sommen zoals $5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+5^7$ hanteert men via het sommatieteken een compactere notatie:

$5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+5^7+5^8=\sum\limits_{n=2}^{8}5^n$, gelezen als de som(matie) van 5^n voor n gaande van 2 tot 8. In dit geval noemt men 2 de ondergrens en 8 de bovengrens van deze sommatie. De index n kan vervangen worden door een andere letter wanneer dit overal gebeurt, zo geldt o.a. $\sum\limits_{n=2}^{8}5^n=\sum\limits_{k=2}^{8}5^k=\sum\limits_{\ell=0}^{6}5^{2+\ell}$

Opgaven

Bereken

1) $\sum\limits_{n=0}^{6}3^n$

2) $\sum\limits_{i=1}^{4}2i$

3) $\sum\limits_{i=1}^{4}i+2$

4) $\sum\limits_{i=1}^{4}(i+2)$

5) $\sum_{k=1}^{3}(k-1)^2$

6) $\left(\sum_{k=1}^{3}(k-1)\right)^2$

7) $\sum_{k=1}^{10}2^k$

8) $\sum_{n=6}^{20}2^n$

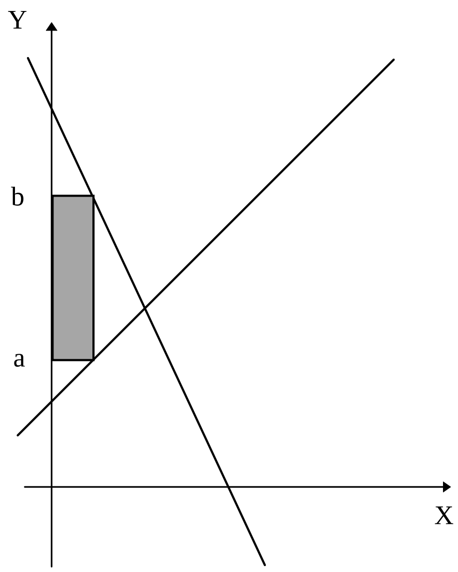
9) $\sum_{k=1}^{3}1$

10) $\sum_{k=1}^{10}\left[1+(-1)^k\right]$

7. Enkele problemen

7.1 Een balkvormig glazen aquarium (zonder bovenrand) heeft als zijwanden links en rechts twee vierkanten. De inhoud van dit aquarium bedraagt 160 dm^3, terwijl de manteloppervlakte (gevormd door de twee vierkanten links en rechts, het grondvlak en de voor- en achterwand) gelijk is aan 152 dm^2. Bepaal de afmetingen van dit aquarium.

7.2 Beschouw in een vlak de rechten met vergelijking $y = x + 1$ en $4x + 2y = 9$.



Bepaal (positieve) getallen a en b zodat de rechthoek op bovenstaande figuur een oppervlakte gelijk aan 1 heeft. Deze rechthoek is gelegen in het eerste kwadrant en heeft naast de hoekpunten (0,a), (0,b) twee hoekpunten die tot de rechten $y = x + 1$ en $4x + 2y = 9$ behoren.

7.3 Een cilindervormige gesloten olietank moet vervaardigd worden uit drie delen: een (te plooien) rechthoekige zijwand en twee gelijke cirkelvormige schijven met straal 0,25 m die aan elkaar gelast worden. Bepaal de afmetingen van de (te plooien) rechthoekige zijwand wanneer de inhoud van deze olietank 1000 liter bedraagt.